Résumé des propriétés importantes en algèbre

1. Produit scalaire

Le produit scalaire <x, y> dans un espace vectoriel E est défini par :

<x, y> = tr(A^T B) (dans un espace matriciel).

Propriétés :

- Symétrie : <x, y> = <y, x>,

- Bilinéarité : <alphax + betaz, y> = alpha<x, y> + beta<z, y>,

- Définie positive : <x, x> >= 0 et <x, x> = 0 <-> x = 0,

- Lien avec la norme : ||x||^2 = <x, x>,

- Inégalité de Cauchy-Schwarz : |<x, y>| <= ||x|| * ||y||.

2. Norme associée au produit scalaire

La norme ||x|| est définie à partir du produit scalaire :

||x|| = sqrt<x, x>.

Propriétés :

- Positivité : ||x|| >= 0 et ||x|| = 0 <-> x = 0,

- Homogénéité : ||alphax|| = |alpha| * ||x||,

- Inégalité triangulaire : ||x + y|| <= ||x|| + ||y||.

3. Développements normatifs

- Développement de ||x + y||^2 :

  ||x + y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 + 2<x, y>.

- Développement de ||x - y||^2 :

||x - y||^2 = ||x||^2 + ||y||^2 - 2<x, y>.

4. Relation de polarisation

Permet de retrouver le produit scalaire à partir des normes :

<x, y> = 1/2 (||x + y||^2 - ||x||^2 - ||y||^2).

5. Isométrie et endomorphisme orthogonal

Définition :

On dit que u in L(E) est un endomorphisme orthogonal (ou isométrie vectorielle) si :

forallx in E, ||u(x)|| = ||x||.

Proposition :

1. Un endomorphisme orthogonal est bijectif. On parle alors d'automorphisme orthogonal.

2. Un endomorphisme orthogonal conserve le produit scalaire :

forallx, y in E, <u(x), u(y)> = <x, y>.

3. Si u est un automorphisme orthogonal, alors :

det(u) = +-1.

6. Produit scalaire matriciel

Pour des matrices A, B in M_n(R), le produit scalaire est défini par :

<A, B> = tr(A^T B),

où tr est la trace de la matrice.

Propriétés :

- Norme de Frobenius : ||A||_F = sqrttr(A^T A),

- Cyclicité de la trace : tr(ABC) = tr(BCA) = tr(CAB).

7. Inégalité de Cauchy-Schwarz généralisée

Pour tout espace vectoriel normé ou espace matriciel :

|<x, y>| <= ||x|| * ||y||.

8. Trouver le noyau et l'image d'une application linéaire

Pour une application linéaire f : E -> F :

- **Noyau (Ker(f))** :

  Le noyau de f est l'ensemble des vecteurs de E envoyés sur 0 par f :

  Ker(f) = {x in E | f(x) = 0}.

  Pour trouver Ker(f) :

  - Écrire f(x) sous forme matricielle.

  - Résoudre le système linéaire f(x) = 0.

- **Image (Im(f))** :

  L'image de f est l'ensemble des vecteurs de F qui peuvent être atteints par f :

  Im(f) = {f(x) | x in E}.

  Pour trouver Im(f) :

  - Écrire la matrice associée à f.

  - Trouver un système générateur des colonnes de cette matrice (ou espace colonne).

Relation fondamentale : dim(E) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f)).